APÉNDICE I.1: LA FUNCIÓN DE PRODUCCIÓN

La función de producción agregada de una economía describe cómo el stock de capital (K) y el trabajo (L) empleado, generan la producción total de dicha economía. $\mathrm{Y}=\mathrm{F}(K,L)$

Es habitual – en la denominada función de producción neoclásica- hacer los siguientes supuestos:

1.Las productividades marginales de K y L son <u>*positivas*</u>: aumentos de un factor manteniendo fijo el otro factor, elevan la producción

$$\mathrm{F_L}(K,L) \equiv \frac{\partial \mathrm{F}(K,L)}{\partial \mathrm{L}} \equiv F_L \succ 0$$

$$\mathrm{F_K}(K,L) \equiv \frac{\partial \mathrm{F}(K,L)}{\partial K} \equiv F_K \succ 0$$

2. Las productividades marginales de K y L son <u>*decrecientes*</u>: aumentos adicionales iguales de un factor manteniendo fijo el otro, elevan la producción pero menos que proporcionalmente

$$\frac{\partial \mathrm{F_L}(K,L)}{\partial \mathrm{L}} \equiv \mathrm{F_{LL}}(K,L) \prec 0$$

$$\frac{\partial \mathrm{F_K}(K,L)}{\partial K} \equiv \mathrm{F_{KK}}(K,L) \prec 0$$

3 La función de producción agregada es homogénea de grado uno (es decir, presenta rendimientos constantes a escala): multiplicando los dos factores de producción por la misma constante positiva, la producción varía en la misma proporción que varían los factores.

·Una función de producción agregada es homogénea de grado n cuando ocurre que:

$$\mathrm{F}(\lambda K, \lambda L) = \lambda^n F(K, L)$$

Si n=1, tenemos una función de producción homogénea de grado 1

$$\mathrm{F}(2K, 2L) = 2F(K, L) \quad \lambda = 2$$

Es decir, si se duplica la utilización de ambos factores, la producción también se duplica (rendimientos constantes a escala). Este es el supuesto que vamos a hacer respecto de esta función de producción. Intuición: reaplicación de actividades

Si $n \succ 1$ los rendimientos son crecientes a escala (si se duplica la utilización de ambos factores, la producción más que se duplica

$$\mathrm{F}(2K, 2L) = 2^n F(K, L) \succ 2F(K, L)$$

Si $n \prec 1$ los rendimientos son decrecientes a escala (si se duplica la utilización de ambos factores, la producción no llega a duplicarse.

$$\mathrm{F}(2K,2L) = 2^n F(K,L) \prec 2F(K,L)$$

4. Si los mercados de los factores trabajo y capital son de competencia perfecta, dichos factores son remunerados según su productividad marginal.

La empresa trata de maximizar esta función de beneficios donde r es la remuneración de cada unidad de capital (tipo de interés real) y w la remuneración de cada unidad de trabajo (salario real) Las c.p.o. son:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial L} = \frac{\partial \mathrm{F}(K,L)}{\partial L} - w = 0 \rightarrow w = F_L = PMgL$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial K} = \frac{\partial \mathrm{F}(K,L)}{\partial K} - r = 0 \rightarrow r = F_K = PMgK$$

La remuneración global del factor trabajo es $wL = F_L L$

La remuneración global del factor capital es $rK = F_K K$

Por tanto, la remuneración global a ambos factores es $wL + rK = F_L L + F_K K$

Si además, hay rendimientos constantes a escala, sucede que:

$$F_L L + F_K K = \underbrace{F(K,L)}_{Y}$$

Esto es, cuando existen rendimientos constantes a escala y los mercados son de competencia perfecta, la producción F (K,L) se agota en los pagos a los factores.

Si los rendimientos fueran crecientes a escala $n \succ 1$ la producción sería Insuficiente para remunerar los factores

$$F_L L + F_K K \succ \underbrace{F(K,L)}_{Y}$$

Si los rendimientos fueran decrecientes a escala, $n \prec 1$ el pago a los factores no agota la producción

$$F_L L + F_K K \prec \underbrace{F(K,L)}_{Y}$$

5. cuando existen rendimientos constantes a escala, la productividad marginal de un factor aumenta cuando se incrementa la utilización de otro factor

$$\frac{\partial F_K}{\partial L} = \frac{\partial F_L}{\partial K} = F_{KL} \succ 0$$

6. Si existen rendimientos constantes a escala, la función de producción se puede expresar de forma intensiva. Es decir, que la producción por trabajador Y/L sólo depende del capital por trabajador K/L

Cuando n= 1,tenemos $\mathrm{F}(\lambda K, \lambda L) = \lambda^n F(K, L) = \lambda F(K, L) = \lambda Y$

Si elegimos $\lambda \equiv \frac{1}{L}$ la expresión anterior queda:

$$\mathrm{F}(\frac{1}{L}K, \frac{1}{L}L) = \frac{1}{L}Y \rightarrow F(\frac{K}{L}, 1) = \frac{Y}{L}$$

$$LLamando \quad y \equiv \frac{Y}{L} \; ; \quad k \equiv \frac{K}{L} \qquad f(k) \equiv F(k,1) \equiv F(\frac{K}{L}, 1)$$

Podemos expresar: $y = f(k)$

La intuición económica que está detrás - cuando hay rendimientos constantes a escala – de que la producción por trabajador **y** sólo dependa del capital por trabajador **k** es la siguiente: dividamos la economía grande en **L** economías pequeñas , cada una de ellas con un trabajador (L=1) y con k $\equiv$ K/L unidades de capital. Como la dotación de ambos factores de la economía pequeña es 1/L veces la dotación de ambos factores de la economía grande, entonces su producción será 1/L veces menor. De donde la cantidad de producto por trabajador y $\equiv$ Y/L sólo depende de la cantidad de capital por trabajador **k** y no del tamaño global de la economía.

Para obtener la producción de la economía grande Y basta con multiplicar la producción de cada economía pequeña **y** por el número de economías pequeñas L. Es decir :

$$\mathbf{Y= y.L =f(k).L}$$

7. La producción por trabajador es nula si el capital por trabajador es nulo: f(0)=0

8.La productividad marginal del capital por trabajador k=K/L es positiva y decreciente, siendo muy elevada al principio y muy pequeña al final *(Condiciones de Inada)*

$$f^{'}(k) \succ 0 \;;\; f^{''}(k) \prec 0 \quad ; \quad \underbrace{\lim}_{k\to 0} f^{'}(k) = \infty \quad ; \quad \underbrace{\lim}_{k\to\infty} f^{'}(k) = 0$$

9. El progreso tecnológico se puede incorporar a la función de producción de la siguiente forma: Y=A.F(K,L), donde A es la “”tecnología ,”el conocimiento técnico” ó “las ideas”.Una diferencia fundamental que distingue a los bienes capital y trabajo (K,L) y la tecnología (A) es que los primeros son ***bienes rivales*** y la tecnología es ***no-rival .***Un bien es rival si no puede ser utilizado por más de un usuario a la vez. Si un bien puede ser utilizado por mucha gente al mismo tiempo se dice que es no-rival. Aunque volveremos sobre este punto más adelante, nos quedamos ahora con la naturaleza no-rival del conocimiento.
En Y=A.F(K,L),cuando hablemos de rtos constantes a escala nos referimos a que si doblamos la cantidad de inputs rivales K,L,(ej :replicamos la misma planta) entonces la producción se duplica..No doblamos A porque este conocimiento se puede utilizar simultáneamente en las dos plantas.

Otro punto a considerar es la forma concreta en que el progreso técnico A entra en la función de producción. Podemos distinguir:

a. Y=AF(K,L), Neutral de Hicks.
b. Y=F(K,AL), Neutral de Harrod.
c. Y=F(AK,L), Neutral de Solow.

Isoquants with Neutral Technological Progress

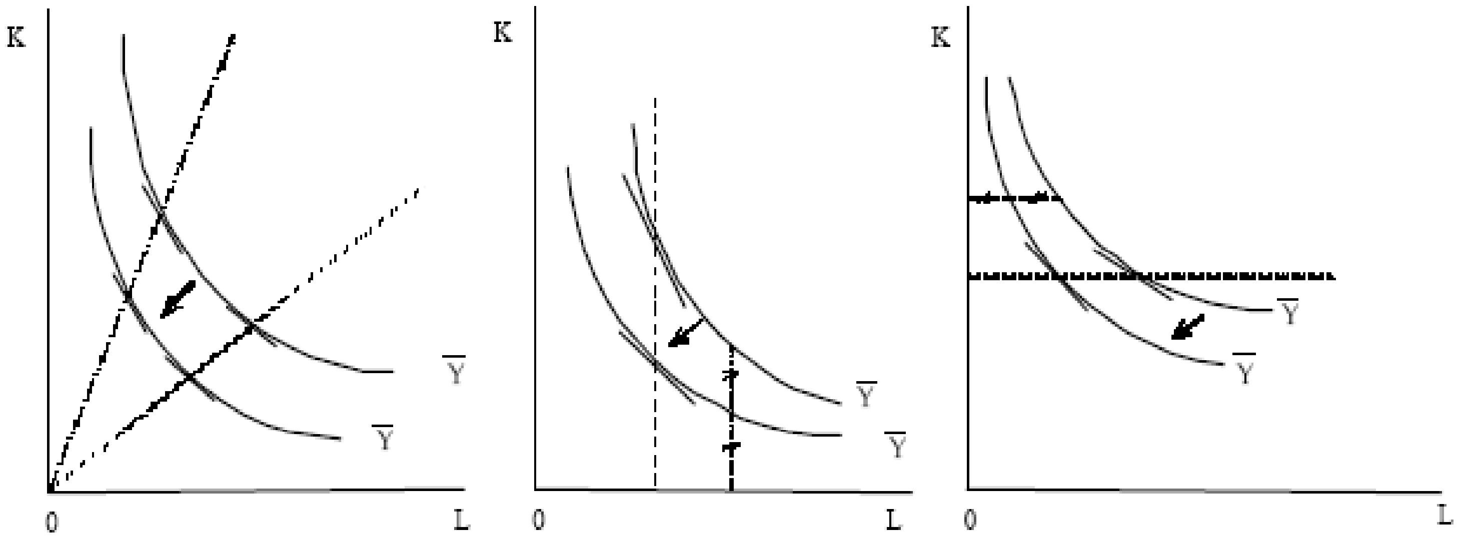

Figure: Hicks-neutral, Solow-neutral and Harrod-neutral shifts in isoquants.

Nosotros por conveniencia/necesidad analítica vamos a adoptar la versión Y=F(K,AL), Neutral de Harrod donde A es “potenciador del trabajo” y AL se denomina “trabajo efectivo” que puede aumentar por aumentos de L dado A, o aumentos de A, dado L.
Además, para una función de producción concreta que vamos a adoptar a menudo (la Cobb-Douglas), estas distintas representaciones son equivalentes

La función de Producción Cobb-Douglas $Y = AK^{\alpha} L^{1-\alpha}$

Surge cuando Paul Douglas, profesor de economía y luego senador por Illinois, observó que la división de la renta nacional entre trabajadores y capitalistas permanecía más o menos constante en el tiempo. Le preguntó a un amigo matemático, Charles Cobb, si existía una función de producción tal que si los factores de producción cobraban según su productividad marginal, la proporción de renta agregada que se quedaba cada uno de ellos fuera constante.
La función de producción debería tener, pues, estas dos propiedades:

1. Rentas del capital = $PMgK.K = \alpha .Y$
2. Rentas del trabajo = $PMgL.L = (1-\alpha).Y$

Donde α es la participación del capital en la renta nacional.

Cobb demostró que tal función existía y tomaba la forma $Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$ y de ahí su nombre.

Propiedades:

1 .Presenta rendimientos constantes a escala. $A(\lambda K)^{\alpha}(\lambda L)^{1-\alpha} = \lambda AK^{\alpha}L^{1-\alpha} = \lambda Y$

2.Los productos marginales de K ,L son positivos:

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = \alpha AK^{\alpha-1}L^{1-\alpha} \succ 0$$

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = (1-\alpha)AK^{\alpha}L^{-\alpha} \succ 0$$

3. Los productos marginales de K,L son decrecientes:

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial K^2} = \alpha(\alpha-1)AK^{\alpha-2}L^{1-\alpha} \prec 0$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial L^2} = (1-\alpha)(-\alpha)AK^{\alpha}L^{-\alpha-1} \prec 0$$

4. Cumple los límites requeridos por las condiciones de Inada.

$$\underbrace{\lim}_{K\to\infty} \frac{\partial Y}{\partial K} = \alpha AK^{\alpha-1}L^{1-\alpha} = 0 \qquad \underbrace{\lim}_{K\to 0} \frac{\partial Y}{\partial K} = \alpha AK^{\alpha-1}L^{1-\alpha} = \infty$$

$$\underbrace{\lim}_{L\to\infty} \frac{\partial Y}{\partial L} = (1-\alpha)AK^{\alpha}L^{-\alpha} = 0 \qquad \underbrace{\lim}_{L\to 0} \frac{\partial Y}{\partial L} = (1-\alpha)AK^{\alpha}L^{-\alpha} = \infty$$

5.. Al remunerar a los factores por su productividad marginal, las participaciones del capital y del trabajo en la producción se mantienen constantes

$$F_K \equiv \frac{\partial Y}{\partial K} = \alpha AK^{\alpha-1}L^{1-\alpha} = \frac{\alpha}{K}AK^{\alpha}L^{1-\alpha} = \frac{\alpha}{K}.Y$$

$$F_L \equiv \frac{\partial Y}{\partial L} = (1-\alpha)AK^{\alpha}L^{-\alpha} = (1-\alpha)AK^{\alpha}.L.L^{-1}L^{-\alpha} = (1-\alpha)AK^{\alpha}\frac{L^{1-\alpha}}{L} = \frac{(1-\alpha)}{L}.Y$$

Por tanto:

$$\frac{r.K}{Y} = \frac{F_K K}{Y} = \frac{(\frac{\alpha.Y}{K})K}{Y} = \alpha$$

$$\frac{w.L}{Y} = \frac{F_L L}{Y} = \frac{(\frac{(1-\alpha).Y}{L})L}{Y} = 1-\alpha$$

6. Finalmente, para la Cobb-Douglas ,son equivalentes las formas en que la tecnología A entra en la función de producción.

$$Y = F(K, AL) = K^{\alpha}(A.L)^{1-\alpha} = A^{1-\alpha}K^{\alpha}L^{1-\alpha}; llamando\ \overline{A} \equiv A^{1-\alpha} \rightarrow \overline{A}K^{\alpha}L^{1-\alpha} = \overline{A}F(K, L) = Y$$

A.1. Derivadas

La derivada de una función f(x) respecto de la variable x expresa cómo varía f(·) al variar x en una cantidad muy pequeña.

Si f(·) aumenta al aumentar x, entonces $\frac{df}{dx} \succ 0$ y viceversa.

Por ejemplo, si f(x)=5x, entonces $\frac{df}{dx} = 5$ ó $df = 5dx$

Para cada variación pequeña de x, f(·) varía en una cantidad 5 veces mayor

A.1.1. ¿ Que significa $\dot{K}$?

En el crecimiento económico, una derivada muy común es la derivada respecto al tiempo.
Por ejemplo, si el stock de capital K es función del tiempo, nos podemos preguntar cómo varía K en el tiempo y esto lo capta la derivada dK/dt.
Si K aumenta en el tiempo, entonces $\frac{dK}{dt} \succ 0$

Para denotar derivadas respecto al tiempo es útil y convencional utilizar la "notación del punto", esto es: $\dot{K} \equiv \dfrac{dK}{dt}$

Por ejemplo, si $\dot{K} = 5$,entonces, por cada unidad de tiempo que transcurre, K aumenta en 5 unidades.
Nótese que esta derivada está estrechamente relacionada con la idea de variación $K_{2010} - K_{2009}$. ¿ En que difieren?.
En primer lugar, podemos reescribir el cambio entre 2009 y 2010 como $K_t - K_{t-1}$.
Esta segunda expresión es más general: podemos evaluarla para cualquier t, de forma que podemos pensar en este cambio como cambio por unidad de tiempo, donde la unidad de tiempo es aquí un período.

Frente a esta variación en tiempo discreto, $\dot{K}$ es un cambio instantáneo en lugar del cambio a lo largo de un año entero.

Nótese que podemos calcular la variación del stock de capital K a lo largo de un año, un mes ,un día..etc. A medida que acortamos el intervalo temporal del cálculo de la variación del stock de capital, la expresión $K_t - K_{t-1}$ expresada por unidad de tiempo, se aproxima a la variación instantánea $\dot{K}$

Formalmente, esto es exactamente la definición de derivada. Sea Δt el intervalo temporal (año, mes día..)

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{K_t - K_{t-1}}{\Delta t} = \frac{dK}{dt} = \dot{K}$$

A.2. Tasas de crecimiento

¿ Que es una tasa de crecimiento? Las tasas de crecimiento se utilizan con frecuencia en economía, finanzas y ciencia en general y van a aparecer con muy a menudo en este curso.

La forma más sencilla de captar la idea de tasa de crecimiento, es considerarla como una variación relativa ó proporcional.

Veamos esto con cierto detalle para tener soltura a lo largo del curso.

a) Concepto de tasa de variación (en tiempo discreto).

Si tenemos una serie temporal **Yt** y queremos medir la variación entre dos períodos de tiempo - t-1 ,t - de sus observaciones, podemos calcular :

(i) **La variación absoluta** o diferencia en los valores observados entre esos dos períodos :

$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$

Diferencia que viene expresada en las mismas unidades que la serie original, y que puede ser positiva ó negativa.

¿ Es satisfactoria esta medida ? Veamos esto con un ejemplo.

Ejemplo. Sea la serie Y_t, donde $Y_{t-1} = 100$, $Y_t = 110$. La variación absoluta :

$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1} = 110 - 100 = +10$ unidades

Ahora observamos la serie X_t, donde $X_{t-1} = 1000$, $X_t = 1010$. La variación absoluta :

$\Delta X_t = X_t - X_{t-1} = 1010 - 1000 = +10$ unidades

En ambos casos, la variación absoluta es de 10 unidades positivas, pero parece evidente que no es lo mismo pasar de 100 a 110 que de 1000 a1010.

Para medir la variación de forma más precisa, eliminando las diferencias de escala y permitir las comparaciones, es preciso considerar la variación relativa

(ii) **Tasas de variación**.

Definimos la variación relativa o tasa de variación de la serie Y_t en el período t como :

$$g_Y \equiv \frac{(Y_t - Y_{t-1})}{Y_{t-1}} \equiv \frac{Y_t}{Y_{t-1}} - 1 \quad (1)$$

Esta medida viene expresada en tantos por uno y es habitual expresarla en tantos por ciento, multiplicando el resultado obtenido por 100.

Ejemplo: Con los datos del ejemplo anterior, las tasas de variación para las series Y_t , X_t son respectivamente:

g_Y = (110-100)/ 100 = (110/100) - 1 = 1,1 - 1 = 0,1 = 0,1 $\times$ 100 = **10%**

g_X = (1010-1000)/ 1000 = (1010/1000) - 1 = 1,01 - 1 = 0,01 = 0,01 $\times$ 100 = **1%**

Ahora vemos que la variación absoluta de +10 en ambas series, suponen una variación relativa porcentual respecto a sus valores iniciales del 10% y 1% respectivamente.

Además, las tasas de variación son **adimensionales -** exentas de unidad de medida - lo que permite la comparación entre series con unidades de medida dispares.

Transformando (1) se obtiene que:

$$(1+g_Y).Y_{t-1} = Y_t \quad (2)$$

Esto es, si conocemos el valor de la variable Y en t-1 y el valor de la tasa de crecimiento entre t -1 y t, podemos hallar el valor de la variable Y en el periodo t.

Supongamos ahora que la variable Y crece a una tasa constante a lo largo del tiempo. Si el valor de Y en el período 0 era Y_0 y la tasa de crecimiento en cada periodo es **g**%, entonces al cabo de t períodos el valor de Y será:

$$Y_t = (1+g)^t Y_0 \quad (3)$$

Por ejemplo, si Octavio Augusto hubiese depositado 1 dólar en el banco en el año 0 y este le hubiese pagado un tipo de interés real del 1.5% anual, en el año 2000 recibiría:

$$Y_{2000} = (1+0.015)^{2000} * 1\$ = \$8,552,330,953,000$$

Cifra cercana al PIB de EEUU de hace unos pocos años

Pregunta inversa : conocemos los valores que toma la variable Y en el período 0 y en t y queremos hallar la tasa de crecimiento constante entre esos t períodos:

$$Y_t = (1+g)^t . Y_0$$

$$(1+g)^t = \frac{Y_t}{Y_0}$$

$$(1+g) = \left(\frac{Y_t}{Y_0}\right)^{\frac{1}{t}}$$

$$g = \left(\frac{Y_t}{Y_0}\right)^{\frac{1}{t}} - 1 \qquad (4)$$

Por ejemplo, si el PIB de un país en 1900 era de 1000$ y en el año 2000 de 15.000$, la tasa constante anual de crecimiento será.

$$g = \left(\frac{15.000}{1.000}\right)^{\frac{1}{100}} - 1 = 0.027 = 2.7\%$$

b) Tasas de crecimiento en tiempo continuo

Tasa instantánea de crecimiento: es la variación instantánea o derivada respecto al tiempo de la variable considerada dividida por el valor inicial de esta variable.
Por ejemplo, la tasa de crecimiento instantánea del stock de capital sería:

$$\frac{dK/dt}{K} \equiv \frac{\dot{K}}{K}$$

La interpretación sigue siendo "variación proporcional" y se utilizan con frecuencia por su fácil manejo matemático

Ejemplo: Si $\frac{\dot{K}}{K} = 0.05$, esto significa que el stock de capital (K) está creciendo al 5% anual

Tasas de crecimiento y logaritmos naturales: La conveniencia apuntada antes de utilizar tasas instantáneas de crecimiento, está conectada con algunas propiedades de los logaritmos naturales (en base e):

1. $Si\ Z = X * Y \Rightarrow \log Z = \log X + \log Y$
2. $Si\ Z = X / Y \Rightarrow \log Z = \log X - \log Y$
3. $Si\ Z = X^{\alpha} \Rightarrow \log Z = \alpha \log X$
4. $Si\ Y = f(X) = \log X \Rightarrow \dfrac{dY}{dX} = \dfrac{1}{X}$
5. $Si\ Y(t) = \log X(t) \Rightarrow \dfrac{dY}{dt} = \dfrac{dY}{dX} * \dfrac{dX}{dt} = \dfrac{1}{X} * \dot{X} = \dfrac{\dot{X}}{X}$

$$5.\ Si\ Y(t)=\log X(t) \Rightarrow \frac{dY}{dt}=\frac{dY}{dX}*\frac{dX}{dt}=\frac{1}{X}*\dot{X}=\frac{\dot{X}}{X}$$

5. Es un resultado importante: La derivada respecto al tiempo del logaritmo de una variable es la tasa de crecimiento de dicha variable.

Por ejemplo, si K es el stock de capital, entonces:

$$\frac{d\log K}{dt}=\frac{\dot{K}}{K}$$

Por tanto, tomando logaritmos y derivando respecto del tiempo obtenemos la tasa de crecimiento de una variable.

Ejemplo de tomar logaritmos y derivar respecto al tiempo. En este ejemplo utilizamos las propiedades anteriores de los logaritmos naturales.

Considere una función de producción Cobb-Douglas: $Y = K^{\alpha} L^{1-\alpha}$

Tomando logaritmos: $\log Y = \log K^{\alpha} + \log L^{1-\alpha}$

Por la propiedad 3 anterior: $\log Y = \alpha \log K + (1-\alpha) \log L$

Tomando derivadas respecto al tiempo a ambos lados:

$$\frac{d \log Y}{dt} = \alpha \frac{d \log K}{dt} + (1-\alpha) \frac{d \log L}{dt}$$

que implica:

$$\frac{d \log Y}{dt} = \frac{\dot{Y}}{Y} = \alpha \frac{\dot{K}}{K} + (1-\alpha) \frac{\dot{L}}{L}$$

Esta última ecuación nos dice que la tasa de crecimiento de la producción es una media ponderada de las tasas de crecimiento del capital y el trabajo.

Aplicación: ratios y tasas de crecimiento. Sea **Z=X/Y** donde Z permanece constant

Por tanto, su derivada respecto al tiempo es cero $\frac{dZ}{dt} = \dot{Z} = 0$

Tomando logaritmos y derivando respecto al tiempo

$$\frac{d\log Z}{dt} = \frac{d\log X}{dt} - \frac{d\log Y}{dt} \Rightarrow \frac{\dot{Z}}{Z} = \frac{\dot{X}}{X} - \frac{\dot{Y}}{Y} = 0 \Rightarrow \frac{\dot{X}}{X} = \frac{\dot{Y}}{Y}$$

Esto es, *si el ratio de 2 variables es constante, significa que ambas variables tienen la misma tasa de crecimiento*

Δ log versus. cambios proporcionales.

Supongamos una variable que presenta crecimiento exponencial:

$$y(t) = y_0 e^{gt}$$

y(t) podría medir, por ejemplo, la producción per. cápita de una economía. Entonces:

$$\log y(t) = \log y_0 + gt$$

por tanto, la tasa de crecimiento g podría calcularse como:

$$g = \frac{1}{t}(\log y(t) - \log y_0)$$

O calculando la tasa de crecimiento entre t y t-1

$$g = \log y(t) - \log y(t-1) \equiv \Delta \log y(t)$$

Las 2 últimas ecuaciones proporcionan la justificación para calcular la tasa de Crecimiento como la variación en el log de una variable.

¿ Cual es la relación de esta definición más precisa con la aproximación más familiar de tasa de crecimiento como variación proporcional?. La respuesta es sencilla:

$$\frac{y(t)-y(t-1)}{y(t-1)} = \frac{y(t)}{y(t-1)} - 1$$

$$= \quad e^{g} - 1$$

Recordar que la aproximación de Taylor para la función exponencial es

$e^{g} \approx 1+g$ para valores pequeños de g,

Aplicando esto a la última ecuación, se muestra que los cálculos de la variación proporcional y el de la variación del logaritmo, son aproximadamente equivalentes para tasas de crecimiento pequeñas:

$$\frac{y(t)-y(t-1)}{y(t-1)} \approx g$$

Relación entre Nivel y Tasa de Variación de una variable.

Veamos esta importante relación con un ejemplo referido a la variable Pt.

Período	Nivel (P_t)	Tasa de variación (P_t - P_{t-1}) / P_{t-1}
0	100	
1	105	+ 5%
2	110	+ 4,8%
3	115	+ 4,5%
4	120	+ 4,3%
5	125	+ 4,2%
6	125	0%
7	120	- 4%

Puntos básicos a retener del ejemplo :

(i) **Cuando la tasa de variación es Positiva, el nivel Aumenta.**
En términos hidraúlicos : tenemos abierto el grifo de una bañera que inyecta agua con una determinada intensidad (tasa positiva) y cerrado el desagüe ⇒ el *nivel* de agua en la bañera *Aumenta.*

(ii) **Cuando la tasa de variación es Negativa, el nivel Disminuye.**
Ahora está cerrado el grifo y abierto el desagüe por donde sale agua con una determinada intensidad (tasa negativa) ⇒ el *nivel* de agua *Disminuye.*

(iii) **Cuando la tasa de variación es Nula, el nivel permanece Constante.**
Como están cerrados tanto el grifo como el desagüe (tasa nula) ⇒ el *nivel* de agua *no varía*.

(iv) Punto sutil : en el ejemplo se muestran períodos (del 1 al 5) en los que la tasa es positiva pero decreciente.
como es positiva, el nivel aumenta.
como es decreciente, el nivel aumenta pero cada vez en menor proporción (aunque la variación absoluta sea la misma) : de 120 a 125 hay una variación proporcional menor que de 100 a 105.
Si la variable Pt es el nivel de precios, entonces su tasa de variación $\dot{P}t$ es la inflación ; entre los períodos 1 a 5 se aprecia con claridad que la inflación - positiva - está disminuyendo y que el nivel de precios está aumentando.

A.3. Integración

La integración en el cálculo es el equivalente a una suma.
Por ejemplo, si consideramos una función de producción escrita como

$$\boldsymbol{Y} = \sum_{\boldsymbol{i}=1}^{10} \boldsymbol{x_i} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{.....x}_{10} \qquad (1)$$

Donde el output Y es simplemente la suma de diez inputs diferentes. Podemos Imaginar una función de producción relacionada con la anterior:

$$\boldsymbol{Y} = \int_0^{10} \boldsymbol{x_i di} \qquad (2)$$

En esta función de producción, el output es la suma ponderada de un continuo de inputs x_i indiciados en la línea de números reales en el intervalo entre 0 y 10. Obviamente hay un número infinito de inputs en esta 2ª función de producción, ya que hay infinitos números reales en ese intervalo. Sin embargo, cada input está “ponderado” por el tamaño medio de un intervalo di que es muy pequeño. Esto genera producción finita aunque cada uno de los infinitos números de inputs se utilicen en cantidades positivas.. No hay que liarse con este razonamiento. Mejor, concebir las integrales como sumas y pensar en la 2ª función de producción como lo hacíamos con la 1ª

Para mostrar que razonando así no estamos demasiado confundidos, supongamos que en los dos casos utilizamos 100 unidades de cada input x_i=100 para todos los i. El output con la función de producción (1) es igual a 1000.¿cual sería con la función De producción (2)?:

$$\boldsymbol{Y} = \int_0^{10} 100\boldsymbol{di} = 100\int_0^{10} \boldsymbol{di} = 100\boldsymbol{(}10 - 0\boldsymbol{)} = 1000$$

Luego la producción es la misma en ambos casos

Una regla importante de integración: es este último paso, hemos utilizado una regla Importante de integración. Las integrales y las derivadas son como la multiplicación y división, se “cancelan”:

$$\int \boldsymbol{dx} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{C} \quad \textbf{\textit{donde C es una constante}}$$

$$\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{dx} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$$

A.4. Ecuaciones diferenciales sencillas

En este curso, sólo hay una ecuación diferencial, sencilla, que debemos resolver: Es laecuación diferencial básica que relaciona tasas de crecimiento con niveles. Supongamos que unavariable x estácreciendo auna tasaconstante g. Esto es:

$$\frac{\dot{x}}{x} = g$$

¿ Que implicación tiene esto sobre el nivel de x?. La respuesta puede verse recordando que la tasade crecimiento de x es la derivada del log:

$$\frac{d \log x}{dt} = g$$

Laclave para resolver esta ecuación diferencial es recordar que para “deshacer” derivadas, utilizamos integrales. Reescribamos, en primer lugar, la ec. diferencial:

$$d \log x = gdt$$

Ahora, integremos ambos lados de esta ecuación

$$\int d\log x = \int g dt \quad \Rightarrow \log x = gt + C$$

Donde, de nuevo, C es una constante..Por tanto, el logaritmo natural de una variable que crece a una tasa constante, es <u>*una función lineal del tiempo*</u>
Tomando exponenciales en ambos lados obtenemos:

$$x = \bar{C}e^{gt} \qquad (3)$$

Donde $\bar{C} = cte = e^{C}$

Para ver que constante es, pongamos t=0 y vemos que $x(0) = \bar{C}$

Supondremos que $x(0)=x_0$, esto es, para t=0, x toma un determinado valor x_0

Aesto se le denomina la condición inicial. De forma que $\bar{C} = x_0$

Este razonamiento, muestra por qué decimos que una variable que crece a una Tasa constante g, tiene crecimiento “exponencial”. El gráfico A.1 dibuja x(t) para $X_0=1$ y g=0.05

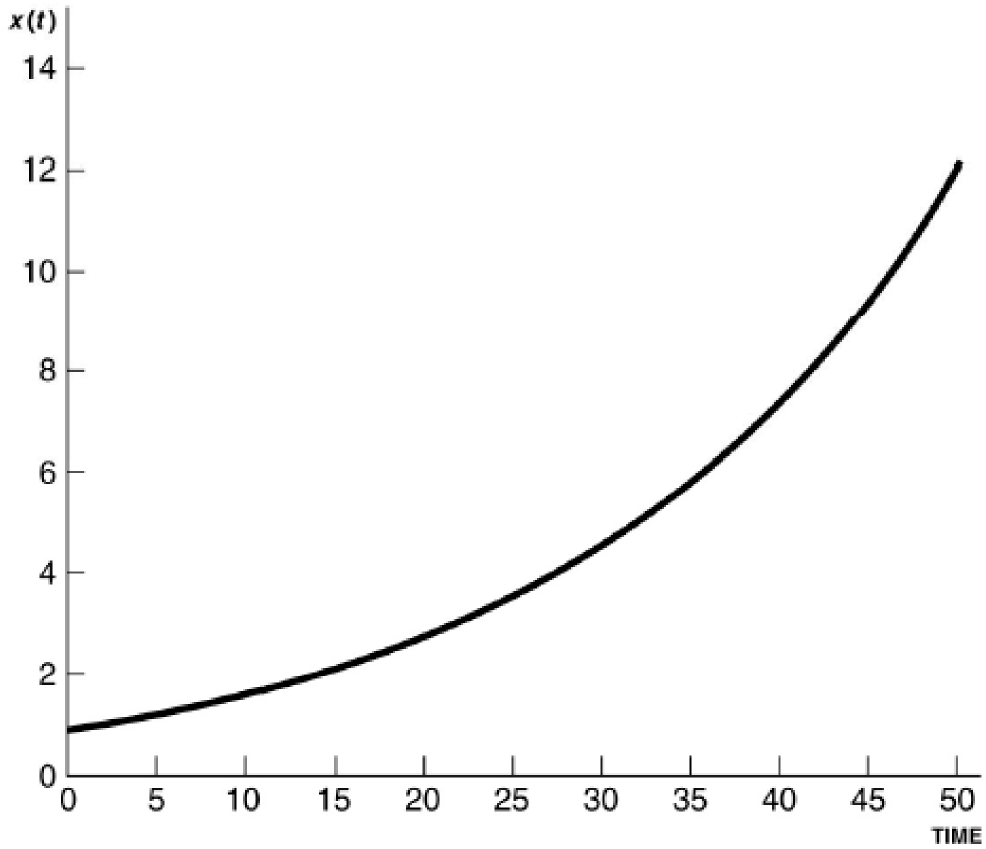

FIGURE A.1 EXPONENTIAL GROWTH

Economic Growth, 2nd Edition

A menudo, es conveniente dibujar en logaritmos las variables que están creciendo a una tasa exponencial.. Esto es, en vezde dibujar x(t), dibujamos log x(t).
Para ver por qué, observamos que en el ejemplo anterior, log x(t) es una *función lineal del tiempo:*

$$\log x(t) = \log x_0 + gt$$

El gráfico A.2 dibuja log x(t) para mostrar esta relación lineal. Nótese que la pendiente de esta relación es la tasa de crecimiento de x(t), g=0.05.

Para finalizar, a menudo es conveniente dibujar el log de una variable como la anterior *(pues mirando la evolución de su pendiente estamos viendo la evolución de su tasa de crecimiento)* pero cambiando los números que figuran en el eje de ordenadas: en vez de logaritmos(que son poco informativos) poner los números de la variable original, avisando que el gráfico está en "escala logarítmica".

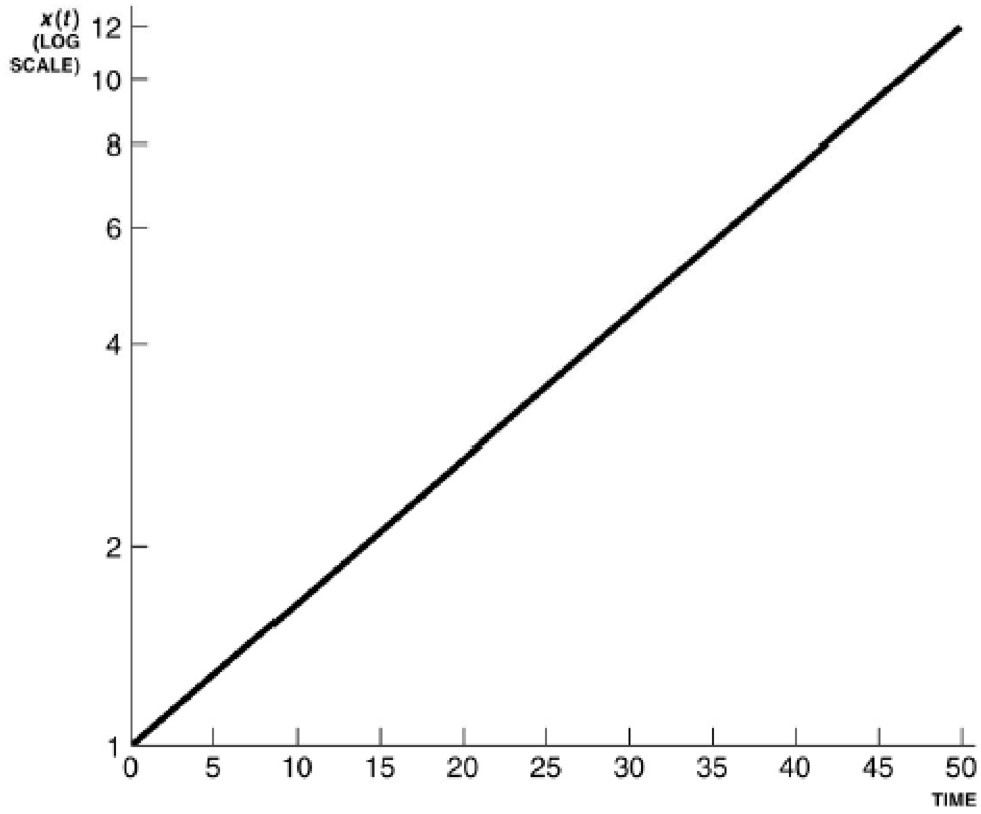

FIGURE A.2 $x(t)$ ON A LOG SCALE

Economic Growth, 2nd Edition

A.4.1. Interés compuesto

Un ejemplo clásico que ilustra la diferencia entre la tasa de variación "instantánea" que utilizamos en este curso y la "variación proporcional ó porcentual" es el de la capitalización compuesta instantánea frente a la capitalización compuesta con períodos discretos como el año, el mes etc.
Supongamos que abrimos una cuenta en el banco de 100 $ y que el banco nos paga un interés del 5% con capitalización anual. Sea x (t) a nuestro saldo en el banco y t el Número de años que los 100$ llevan depositados en el banco. Entonces, para un tipo de interés del 5% con capitalización anual, x (t) evoluciona según:

$$x(t) = 100(1 + .05)^t$$

La1ª columna de la Tabla A.1 muestra la evolución del saldo en varios puntos del Tiempo
Supongamos ahora que en vez de capitalización anual, se capitaliza continuamente - no cada año, cada día ó cada minuto-sino que se capitaliza en cada instante. Como en el caso de la capitalización anual, la cuenta en el banco está creciendo a una tasa del 5%.Sin embargo, ahora la tasa de crecimiento es instantánea en vez de ser una tasa de crecimiento anual. En este caso, la evolución del saldo bancario responde a la ecuación diferencial $\frac{\dot{x}}{x} = .05$

En este caso, la evolución del saldo bancario responde a la ecuación diferencial:

$$\frac{\dot{x}}{x} = .05$$

Por los cálculos que hemos hecho antes para obtener la ecuación (3), sabemos que la solución de esta ecuación diferencial es:

$$x(t) = 100e^{.05t}$$

La 2ª columna de la Tabla A.1 muestra el saldo bancario para este caso. Nótese que para el período de un año, la capitalización continua produce un resultado muy levemente superior a 105, pero las diferencias son muy pequeñas, aunque van aumentando con el paso del tiempo.
Este ejemplo de comparación es equivalente matemáticamente a comparar, por ejemplo, tasas de variación instantáneas de la producción por trabajador frente a variaciones proporcionales anuales de la producción por trabajador.

Tabla A.1: saldo bancario con tipo de interés compuesto del 5%		
Años	Capitalización anual	Capitalización continua
0	$100.00	$100.00
1	105.00	105.10
2	110.20	110.50
5	127.60	128.40
10	162.90	164.90
14	198.00	201.40
25	338.60	349.00

Ejercicios

1. Suponga que el ratio Y / AL permanece constante, y que $\frac{\dot{A}}{A} = g; \frac{\dot{L}}{L} = n$

(i) ¿A qué tasa debe crecer Y para que el cociente Y/AL permanezca constante
(ii) ¿ A que tasa debe crecer Y/L para que el ratio Y/AL permanezca constante?

2. Suponga que $\begin{cases} X(t) = e^{.05t} \\ Z(t) = e^{.01t} \end{cases}$ Calcule la tasa de crecimiento en los siguientes casos:

$a)\ Y = X.Z$

$b)\ Y = X / Z$

$c)\ Y = (X / Z)^{\beta}; donde \beta = 1/3$

3. Exprese la tasa de crecimiento de Y en términos de las tasas de crecimiento de k,l,m en los siguientes casos. Suponga que α es una constante arbitraria

$a)\ Y = (k.l.m)^{\alpha}$

$b)\ Y = (k.l)^{\alpha}.(\frac{1}{m})^{1-\alpha}$